Leonhard Euler (1707-1783)

- 15. April 1707
  - Geboren als Sohn des reformierten Pfarrers Paulus Euler und Margaretha Brucker in Basel. Heute Gedenktafel an Wohnhaus.
- 1713
  - Besuch des Lateingymnasium in Basel.
- 1720
  - Studienbeginn an der Universität Basel.
- 1722
  - Prima Laurea (heute Abitur) erworben, Mathematische Anfängervorlesungen bei Johann I Bernoulli.
- 1723
  - Studienabschluss der Philosophischen Fakultät.

- 1724
  - Öffentliche Rede über die Systeme von Descartes und Newton.
- 1726
  - Erste Mathematische Arbeit erscheint in Leipzig im Druck.
- 1727
  - 2. Preis bei einer Preisfrage einer Pariser Akademie.
  - Habilitationsschrift über den Schall.
- ab 1728
  - Petersburger Zeit
- 1731
  - Professor der Physik an der Petersburger Akademie.
- 1733
  - Professor der Mathematik an der Petersburger Akademie.

Goldbach

Am 17. Mai 1727 besuchte er die Universität Sankt Petersburg. Hier traf er auf Christian Goldbach. ---→

- **7. Jänner 1734**
  - **Heirat mit Katharina Gsell.**
- **27. November 1734**
  - **Geburt des ersten Sohnes Johann Albrecht.**
- **1735**
  - **Beteiligung an dem Geographischen Departments der Petersburgers Akademie.**
- **1736**
  - **Lösung des Königsbergers Brückenproblems.**
- **1738**
  - **Verlust des sehvermögens am rechten Auge, als Folge einer Krankheit.**

Berliner Periode 1741-1766

- 1741
  - Übersiedlung nach Berlin
- 1742
  - erhielt Euler einen Brief von Goldbach
- 1744
  - Lehrbuch der Variationsrechnung.
- 1745
  - stirbt der Vater von Leonhard Euler.
- 1748
  - Grundlagenwerk "Introductio in analysin infinitorum“
- 1749
  - Erstes persönliches Treffen zwischen Euler und Friedrich den II.

Neubeginn in Preußen

Friedrich II.

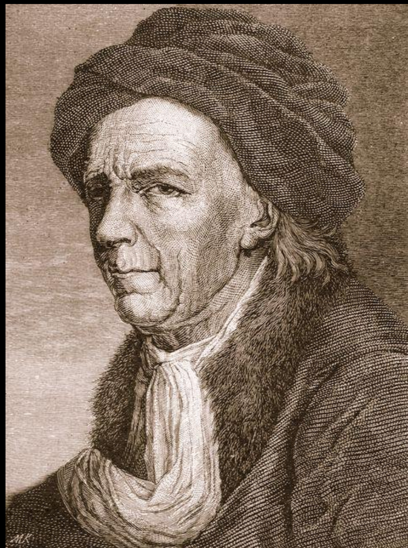
Einladung durch Friedrich II nach Berlin - Aufbau der Akademie der Wissenschaft

Pierre Louis Maupertuis

- Er wurde 1740 Präsident der Berliner Akademie.
- Er hatte viel Kontakt und Gespräche mit Euler.

- **1750 Euler holt seine Mutter nach Berlin.**
- **1755 Euler wird auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie.**
- **1762 Katharina II. lädt Euler zur Rückkehr nach St. Petersburg ein.**
- **1765 2.Werk"Institutiones calculi differentialis" .**

- **1766**
  - **Rückkehr nach St. Petersburg.**
- **mehr als 400 Abhandlungen verschiedenster Gebiete.**
- **1768-1769**
  - **erschienen Werke in russischer Übersetzung.**
- **1768**
  - **Lettres á une Princesse d’ Allemagne (Philosophische Briefe, 3 Bände).**
- **1768-1770**
  - **Institutiones calculi differentialis (Differentialrechnung, 3 Bände).**



- **1769-1771**
  - **Dioptrica (Universelle Optik, 3 Bände).**
- **1770**
  - **Vollständige Anleitung zur Algebra (2 Bände).**
- **1770**
- **dann in deutscher Originalfassung.**
- **1772**
  - **Zweite Mondtheorie.**
- **1773**
  - **Zweite Schifftheorie.**
- **Tod am 18. September 1783 durch Hirnblutung.**

Grabstein in St. Petersburg

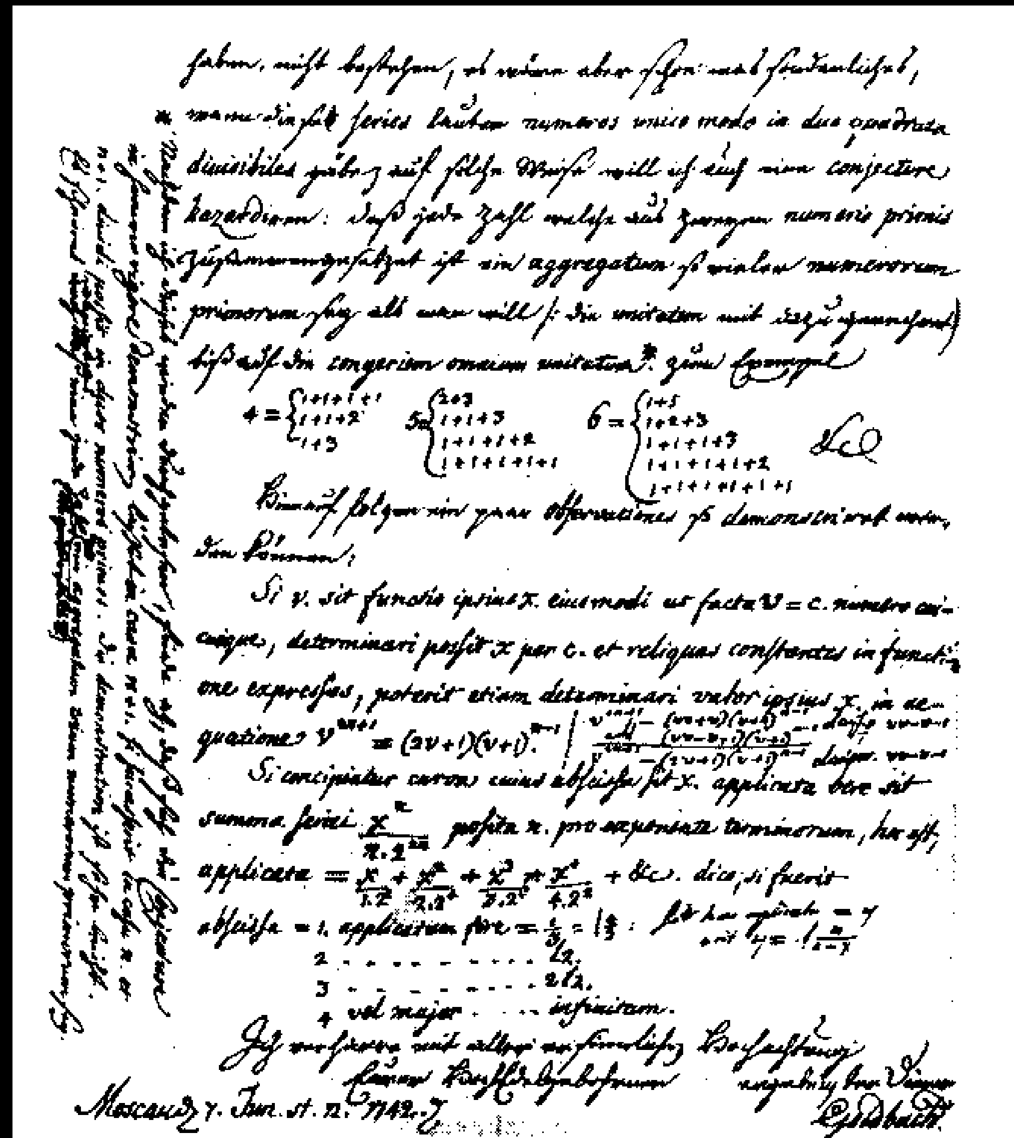
Goldbachsche Vermutung

Brief von

Christian Goldbach

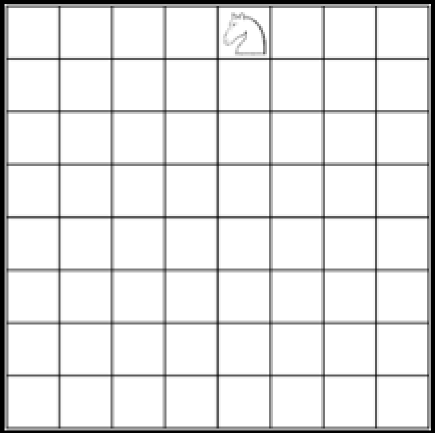
Vermutung:

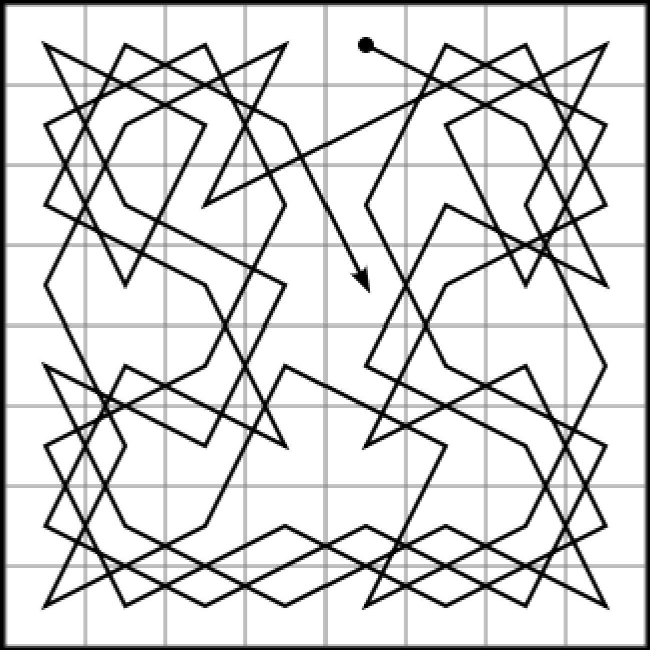
Jede gerade Zahl größer oder gleich 4 ist als Summe zweier Primzahlen darstellbar. (Beispiel: 90 = 31+59)



Rösselsprung

- Euler beschäftigte sich auch mit Schach.
- Euler führte 1758 das Springerproblem ein.





Lateinisches Quadrat

- **Euler befasste sich intensiv mit solchen Quadraten; als Symbolmenge benutzte er das lateinisches Alphabet.**
- **Ein lateinisches Quadrat besteht aus n*n Feldern, wobei jedes Feld mit einem von *n* verschiedenen Symbolen belegt ist**

Es folgt jeweils ein lateinisches Quadrat der Ordnung 3 und 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & d & c \\ b & c & a & d \\ c & d & b & a \\ d & a & c & b \end{bmatrix}$$

Sudoku

- Aus Eulers damaligen lateinischen Quadraten, entstand das heutige Sudoku.
- Das Sudoku hat die Eigenschaft: In jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem 3x3 Quadrat die Ziffern 1-9.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Beiträge zur Zahlentheorie

Teilgebiete der Zahlentheorie

- Elementare Zahlentheorie
  - Kleiner Satz von Fermat
- Analytische Zahlentheorie
  - Euler (z.B:Zahl e=2,7182...) und Gauss (z.B:Primzahlsatz)
- Algebraische Zahlentheorie und arithmetische Geometrie
  - Lösen von diophantischen Gleichungen
- Algorithmische Zahlentheorie
  - Reges Interesse mit Aufkommen des Computers

Geschichte der Zahlentheorie

- 2000 vor Chr. Babylonier und Ägypter mit Zahlen < 10^6
- 300 vor Chr. Euklids Elemente, bis 18. Jahrhundert als Lehrbuch
- 17. Jahrhundert „Satz von Fermat“
- 18. Jahrhundert drei wichtige Mathematiker : Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange und Adrien-Marie Legendre
- 19. Jahrhundert Funktionsgleichung von Bernhard Riemann
- 20. Jahrhundert einige Lösungen für die Zahlentheorie

Eulers wichtigste Beiträge der Zahlentheorie

- Analytische Methoden der Zahlentheorie
- Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen
- Der Satz von Euler = Eulersche Phifunktion
- Zahlentheoretische Funktionen
- Eulersche Zahl
- Eulersche Konstante
- Kettenbruchentwicklung

Der Satz von Euler = Eulersche Phifunktion

- Verallgemeinerung des kleinen Fermatischen Satzes

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

- Bedingung ggT (a,n) =1
- prime Moduln p gilt $\varphi(p) = p-1$

Beispiel Eulersche Phifunktion

- Was ist die letzte Dezimalstelle von 7^{222}, also welche Zahl ist 7^{222} kongruent modulo 10?
- Bemerkung: ggT (7,10) =1 und dass φ(10) = 4
- Lösung:

$$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\Downarrow$$

$$7^{222} = 7^{4\cdot 55+2} = (7^4)^{55} \cdot 7^2 \equiv 1^{55} \cdot 7^2 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10}.$$

- Allgemein gilt:

$$a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(n)} \pmod{n} \qquad a, b, n \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ggT}(a, n) = 1$$

Die Eulersche Zahl

- *e* = 2,718281828459... ist eine irrationale, reelle Zahl
- häufig kurz e-Funktion genannt wird
- spielt in der Differential- und Integralrechnung eine wichtige Rolle

Eulersche Zahl $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \approx 2{,}718281828459045\ldots$

Zahlentheoretische Funktionen

- **Multiplikative Funktionen**
  - **für teilerfremde Zahlen und b gilt:**

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$$

  - **f(ab) = 1 verschwindet nicht**
  - **streng mulitplikativ, wenn dies auch für nicht teilerfremde Zahlen gilt**
  - **Darstellung:**

$$f(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} f\left(p^{\nu_p(n)}\right)$$

Zahlentheoretische Funktionen

- **Additive Funktion:**
  - **wenn für teilerfremde Zahlen a und b stets $f(ab) = f(a) + f(b)$ für $f(a,b) = 1$ gilt**
  - **streng additiv, wenn dies auch für nicht teilerfremde Zahlen gilt**

Analytische Methode der Zahlentheorie

- **Beispiel: Die Eulersche Summationsformel**
  - **asymptotische Wert einer Summe bestimmen**
  - **gibt den genauen Fehler an, der bei einer Approximation entsteht**
  - **verschiedene Anwendungen**

Für $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}$ *und* $x \geq 1$ *gelten folgende Aussagen:*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log(x) + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} = \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \zeta(\sigma) + O(x^{-\sigma}), \quad \sigma \neq 1, \sigma > 0$$

$$\sum_{n > x} \frac{1}{n^\sigma} = O(x^{1-\sigma}), \quad \sigma > 1$$

$$\sum_{n \leq x} n^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^\alpha), \quad \alpha \geq 0.$$

Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen

- **Vorrausetzungen sind die Divergenz der harmonischen Reihe, die Konvergenz der geometrischen Reihe und die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl. Die Divergenz der harmonischen Reihe lässt sich mit dem Integralkriterium zeigen. Für die Konvergenz der geometrischen Reihe betrachtet man die geschlossene Formel.**

Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen

- Die endliche Menge der Primzahlen bezeichnen wir mit p_1, p_2, ..., p_r. Dann muss sich entsprechend dem Hauptsatz der Zahlentheorie jede natürliche Zahl in folgender Form darstellen lassen:

$$n = p_1^{k_1} * p_2^{k_2} * \ldots * p_r^{k_r} \; (k \geq 0)$$

Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen

- **Im Folgenden betrachten wir die Summe der Reziproken der Zahlen n. Gäbe es nur eine Primzahl, wäre also r = 1, so hätte die Reihe folgende Form:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}}$$

- **Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus der geometrischen Summenformel. Wäre r = 2, dann hätten wir die folgende Reihe:**

$$\sum_{k_1, k_2 \geq 0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1} * p_2^{k_2}} = 1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1 * p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots$$

Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen

- Durch Ausrechnen des folgenden Produktes erkennt man die Gleichheit mit der Reihe für r = 2.
- Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich wiederum aus der geometrischen Summenformel. Bei dieser Überlegung und auch für alle weiteren Fälle r > 1 treten keine Konvergenzprobleme auf, da sämtliche Reihen konvergent sind. Für den allgemeinen Fall gilt also:

$$\sum_{k_1 \geq 0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1}} * \sum_{k_2 \geq 0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{k_2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} * \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \qquad \sum_{k_1,\dots,k_r \geq 0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1} * \dots * p_r^{k_r}} = \sum_{k_1 \geq 0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{k_1}} * \dots * \sum_{k_r \geq 0}^{\infty} \frac{1}{p_r^{k_r}} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} * \dots * \frac{1}{1-\frac{1}{p_r}}$$

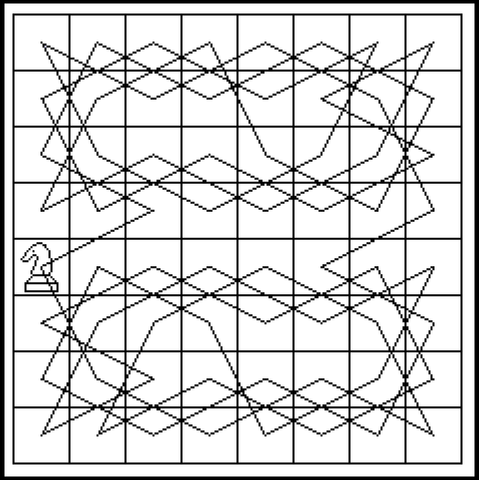
Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen

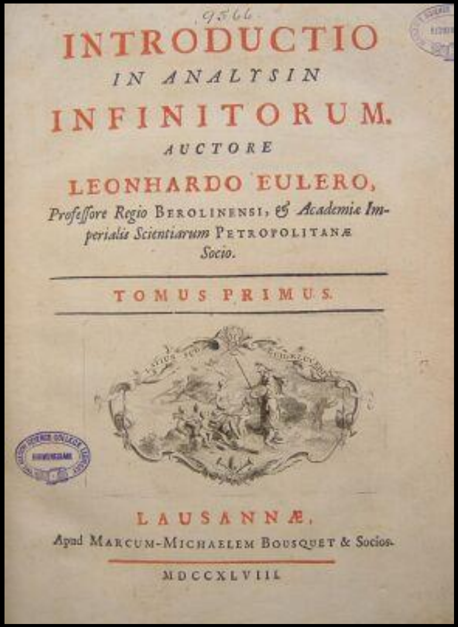
- Aufgrund unserer Annahme sollen nun die Zahlen n gerade sämtliche natürlichen Zahlen darstellen. Dieser Überlegung folgt die Gleichung, in welcher wir die Reziproken der Zahlen betrachten:

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$$

- Auf der linken Seite der Gleichung steht die harmonische Reihe, von der bekannt ist, dass sie divergiert. Rechts dagegen steht ein endlicher Wert, und damit haben wir den Widerspruch, der unsere Annahme widerlegt, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt.

Andere Werke Eulers





INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLVIII.

Was ist eine Funktion?

- **Zentraler Begriff der „Analysis“**
- **Bezeichnung f(x) → dank Euler**
- **„Eine Größe die auf irgendeine Weise aus einer oder mehreren Größen zusammengesetzt ist wird deren Funktion genannt“**

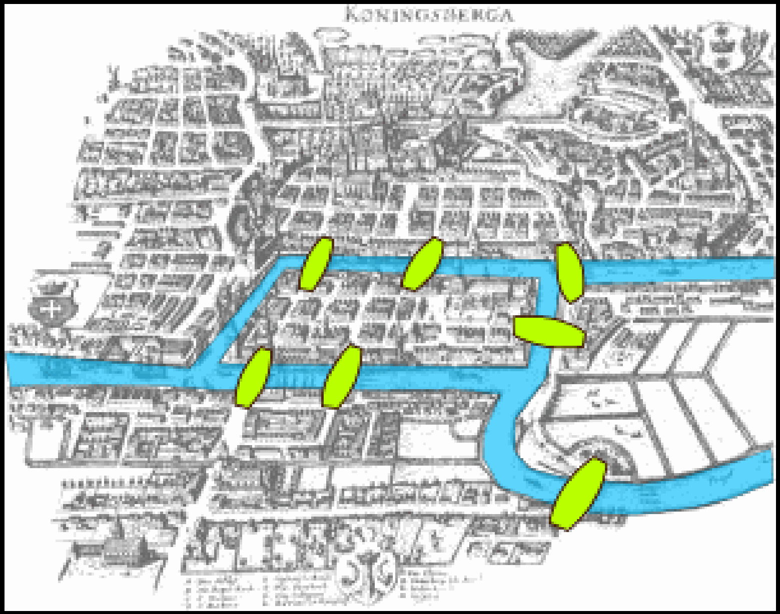
Funktion veränderlicher Zahlengrößen:

- „Eine veränderliche Zahlengröße ist eine solche, die ohne Ausnahme alle bestimmten Zahlenwerte in sich begreift“

- Modern: die alle reellen Zahlen durchläuft

Königsberger Brückenproblem

Über 7 Brücken musst du gehen…



Ist ein Rundgang möglich?

Jede Brücke muss genau 1x überquert werden!

Antwort:

NEIN!

Wie geht's?: Euler löste dieses Problem 1736: Es müsste an jeder Kante eine gerade Anzahl Brücken vorliegen, dann wäre ein Rundgang möglich.

Eulerweg:

...ist dann gegeben wenn statt eines Zyklus lediglich ein <u>Weg</u> verlangt wird, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält.

Einen Graph der einen Eulerkreis besitzt bezeichnet man auch als eulersch.

Nach Euler benannt:

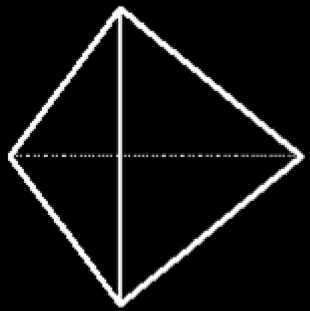
- Die eulersche Zahl
- Die eulersche f-Funktion
- Der eulersche Polyedersatz
- Der Eulerkreis
- Die eulersche Differentialgleichung

...

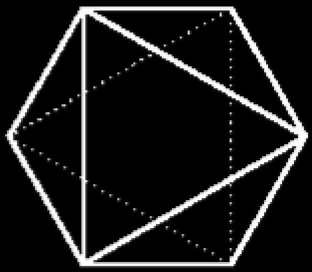
...weiters:

- Euler-Bernoulli-Gleichung
- Das eulersche Integral
- Die eulersche Gammafunktion
- Die eulersche Gerade
- Der eulersche Winkel

Tetraeder



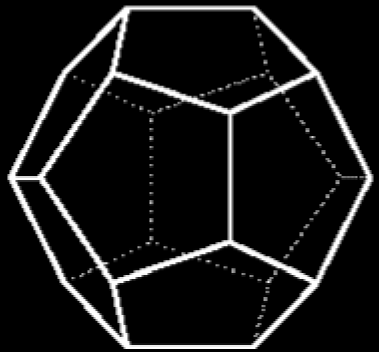
Oktaeder



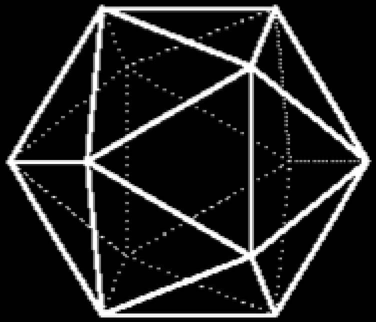
Eulerscher Polyedersatz:

Es gilt: Ecken - Kanten + Flächen = 2

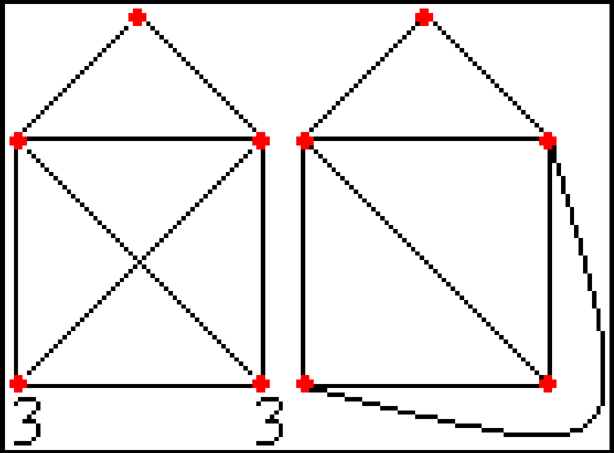
Dodekaeder



Ikosaeder

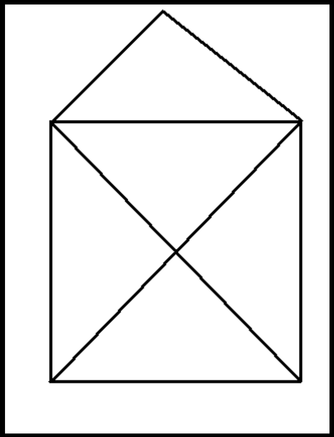


Das „Haus des Nikolaus“



Das wohl allen bekannte „Haus des Nikolaus“ hat auch (mehr als erwartet) mit Mathematik zu tun. Es besteht aus 5 so genannten Knoten. Jeder dieser Knoten hat einen gewissen Knotengrad.

...Ein Knotengrad bezeichnet die Anzahl der Kanten die in dem Punkt zusammentreffen.



← in dieser Ecke z.B. 3 !!!

Es ist unmöglich einen Rundgang über alle Kanten zu machen, da in den unteren Ecken Knotengrad 3 besteht. Es gibt KEINEN Eulerkreis

Zum Andenken an Euler: